ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823

УДК 517.1

О БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ КОМПЛЕКСНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© **В. И. Фомин**

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
E-mail: vasiliyfomin@bk.ru

Аннотация. Рассмотрена банахова алгебра комплексных операторов, находящих применение при исследовании линейных дифференциальных уравнений с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве.

Ключевые слова: комплексный оператор; линейные операции; операция умножения; норма; банахова алгебра; алгебраическая форма комплексного оператора; операторная экспонента

Введение

При изучении в банаховом пространстве E задачи Коши

$$u''(t) + A_1u'(t) + A_2u(t) = f(t), \quad 0 \le t < \infty; \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0$$

с операторными коэффициентами $A_1, A_2 \in L(E)$ и правой частью $f(t) \in C\,([0,\infty)\,; E)$, где $L(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $C\,([0,\infty)\,; E)$ – нормированное пространство непрерывных функций, действующих из $[0,\infty)$ в E, приходится находить характеристические операторы соответствующего однородного уравнения $u''(t) + A_1u'(t) + A_2u(t) = 0$, то есть корни Λ_1, Λ_2 характеристического операторного уравнения $\Lambda^2 + A_1\Lambda + A_2 = O$, где O – нулевой оператор. Вид этих корней определяется видом операторного дискриминанта $D = A_1^2 - 4A_2$. В случае $D = F^2$, где $F \in GL(E)$, $GL(E) = \{Q \in L(E) | \exists\, Q^{-1} \in L(E)\}$, характеристические операторы имеют вид $\Lambda_{1,2} = 2^{-1}(-A_1 \pm F)$; в случае $D = 0$ $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_0 = -2^{-1}A_1$ [1], то есть в обоих случаях $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L(E)$. Иначе обстоит дело в случае $D = -F^2$, где $F \in GL(E)$: характеристические операторы определяются упорядоченными парами операторов из $L(E)$: $\Lambda_1 = (A\,, B)$, $\Lambda_2 = (A\,, -B)$, где $A = -\,2^{-1}A_1$, $B = 2^{-1}F$ [2]. В связи с этим целесообразно изложить основные понятия для таких пар операторов.

1. Основные понятия

Комплексным оператором называется упорядоченная пара $Z = (A, B)$, где $A, B \in L(E)$. Рассмотрим множество комплексных операторов

$$C_{L(E)} = \{Z = (A, B) | A, B \in L(E)\}.$$

Заметим, что $C_{L(E)} = [L(E)]^2$, где $[L(E)]^2 = L(E) \times L(E)$ – декартов квадрат банаховой алгебры $L(E)$.

Согласно известному правилу введения линейных операций в декартовом (прямом) произведении двух линейных пространств [3, с. 17], имеем: для любых $Z_1 = (A_1, B_1)$, $Z_2 = (A_2, B_2) \in C_{L(E)}$

$$Z_1 + Z_2 = (A_1 + A_2, B_1 + B_2); \tag{1}$$

для любого $Z = (A, B) \in C_{L(E)}$ и любого $\alpha \in R$

$$\alpha Z = (\alpha A, \alpha B). \tag{2}$$

Множество $C_{L(E)}$, наделенное операциями (1), (2), является линейным пространством. В этом пространстве $\Theta = (O, O)$ – нулевой элемент; $-Z = (-A, -B)$ – противоположный элемент для $Z = (A, B)$.

Операция умножения в линейном пространстве $C_{L(E)}$ вводится следующим образом: для любых $Z_1 = (A_1, B_1)$, $Z_2 = (A_2, B_2) \in C_{L(E)}$

$$Z_1\, Z_2 = (A_1 A_2 - B_1 B_2, A_1 B_2 + B_1 A_2). \tag{3}$$

Заметим, что эта операция не обладает свойством коммутативности, ибо операция умножения в пространстве $L(E)$ некоммутативна [4, с. 126].

Операция умножения, определенная формулой (3), обладает следующими свойствами: для любых $Z_1, Z_2, Z_3 \in C_{L(E)}$ и любого $\alpha \in R$

1) $(Z_1\, Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2\, Z_3)$ (в силу этого свойства допустима запись $Z_1 Z_2 Z_3$);
2) $Z_1\,(Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$; $(Z_2 + Z_3)\, Z_1 = Z_2 Z_1 + Z_3 Z_1$;
3) $\alpha\,(Z_1 Z_2) = (\alpha\, Z_1) Z_2 = Z_1 (\alpha\, Z_2)$;
4) $(I, O)\, Z = Z(I, O) = Z$, $\forall\, Z \in C_{L(E)}$, где I – единичный оператор.

Следовательно, линейное пространство $C_{L(E)}$ является некоммутативной алгеброй с единицей (I, O).

Используя известные выражения для норм в декартовом произведении двух нормированных пространств [5, с. 103], норму в линейном пространстве $C_{L(E)}$ можно ввести по любой из следующих формул: для любого $Z = (A, B) \in C_{L(E)}$

$$\| Z \| = [\, \| A \|^p + \| B \|^p]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty; \tag{4}$$

$$\| Z \| = \max \{\, \| A \|, \| B \| \,\} \quad , \quad p = \infty, \tag{5}$$

причем эти нормы эквивалентны. В целях определенности будем использовать в дальнейшем норму (4) при $p = 1$:

$$\| Z \| = \| A \| + \| B \|.$$

Заметим, что $\| (I,O) \| = 1$. Кроме того, используя аксиомы нормы пространства $L(E)$ и неравенство $\| F_1F_2 \| \le \| F_1 \| \, \| F_2 \|$, $\forall F_1, F_2 \in L(E)$, получаем для любых $Z_1, Z_2 \in C_{L(E)}$

$$\| Z_1Z_2 \| \le \| Z_1 \| \, \| Z_2 \|.$$

Следовательно, алгебра $C_{L(E)}$ является нормированной.

Известно [3, с. 48], что декартово произведение двух банаховых пространств является банаховым пространством. Следовательно, нормированная алгебра $C_{L(E)}$ является банаховой.

Таким образом, пространство комплексных операторов $C_{L(E)}$ с линейными операциями (1), (2), операцией умножения (3) и любой из норм (4), (5) является некоммутативной банаховой алгеброй с единицей (I,O).

Рассмотрим множество комплексных операторов вида $\Omega = \{Z = (A,O) | A \in L(E)\}$. Между множествами Ω и $L(E)$ существует взаимно однозначное соответствие

$$(A,O) \leftrightarrow A, \quad \forall A \in L(E). \tag{6}$$

Заметим, что в силу определений (1), (3) и соответствия (6) для любых (A_1,O), $(A_2,O) \in \Omega$

$$(A_1,O) + (A_2,O) = (A_1 + A_2, O) \leftrightarrow A_1 + A_2,$$
$$(A_1,O)\,(A_2,O) = (A_1A_2, O) \leftrightarrow A_1A_2,$$

то есть комплексные операторы из множества Ω складываются и перемножаются друг с другом так же, как соответствующие им операторы из $L(E)$. Следовательно, любой комплексный оператор $(A,O) \in \Omega$ можно отождествить с соответствующим ему оператором $A \in L(E)$:

$$(A,O) = A, \quad \forall A \in L(E), \tag{7}$$

в частности, $(O,O) = O$, $(I,O) = I$.

В силу соглашения (7) можно считать, что $L(E) \subset C_{L(E)}$, то есть пространство комплексных операторов является расширением пространства ограниченных линейных операторов.

Укажем запись комплексных операторов в виде, аналогичном алгебраической форме комплексных чисел. Любой комплексный оператор $Z = (A,B)$ можно представить в виде

$$Z = (A,B) = (A,O) + (O,I)\,(B,O). \tag{8}$$

Из равенства (8) видно, что комплексный оператор (O,I) имеет особое значение в пространстве $C_{L(E)}$. Обозначим (O,I) символом I и назовем его мнимой комплексной единицей. Заметим, что $\mathrm{I}^2 = \mathrm{I} \cdot \mathrm{I} \ = (-I,O) = -I$. В силу этого равенства допустима запись $\mathrm{I} = \sqrt{-I}$. В силу соглашения (7) формула (8) принимает вид

$$Z = A + \mathrm{I}B. \tag{9}$$

Выражение (9) называется алгебраической формой комплексного оператора $Z = (A,B)$, при этом операторы A и B называются, соответственно, действительной и мнимой частью комплексного оператора Z (обозначения: ReZ и ImZ). Если

$ImZ = O$, то $Z = A \in L(E)$ (такие операторы называются действительными). Если $ReZ = O$, $ImZ \neq O$, то $Z = \mathrm{I}B$ (такие операторы называются чисто мнимыми).

Для коммутируемости комплексных операторов $Z_1 = A_1 + \mathrm{I}B_1$, $Z_2 = A_2 + \mathrm{I}B_2$ достаточно, чтобы $A_1A_2 = A_2A_1$, $A_1B_2 = B_2A_1$, $B_1A_2 = A_2B_1$, $B_1B_2 = B_2B_1$.

Сопряженным для комплексного оператора $Z = A + \mathrm{I}B$ называется оператор $\bar{Z} = A - \mathrm{I}B$, в частности,

$$\bar{A} = A, \quad \forall\, A \in L(E). \tag{10}$$

Для любых $Z \in C_{L(E)}$, $\alpha \in R$ очевидно соотношение

$$\overline{\alpha Z} = \alpha \bar{Z}. \tag{11}$$

Заметим, что $Z\bar{Z} = A^2 + B^2 + \mathrm{I}(-AB + BA)$, в частности, если $AB = BA$, то $Z\bar{Z} = A^2 + B^2$. Для любых $Z_1, Z_2 \in C_{L(E)}$

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2; \tag{12}$$

$$\overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1\, \bar{Z}_2. \tag{13}$$

Методом математической индукции свойства (12), (13) распространяются на любое конечное число операторов: для любых $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m \in C_{L(E)}$

$$\overline{\sum_{k=1}^{m} Z_k} = \sum_{k=1}^{m} \bar{Z}_k; \tag{14}$$

$$\overline{\prod_{k=1}^{m} Z_k} = \prod_{k=1}^{m} \bar{Z}_k. \tag{15}$$

Обратным оператором для комплексного оператора $Z = A + \mathrm{I}B \in C_{L(E)}$ называется комплексный оператор $Z^{-1} \in C_{L(E)}$, обладающий следующими свойствами:

$$Z\,Z^{-1} = I, \quad Z^{-1}Z = I. \tag{16}$$

З а м е ч а н и е 1. Если $F \in L(E)$, $H \in GL(E)$ и $FH = HF$, то $FH^{-1} = H^{-1}F$.

Теорема 1. *Пусть комплексный оператор $Z = A + \mathrm{I}B$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$AB = BA; \tag{17}$$

$$A^2 + B^2 \in GL(E). \tag{18}$$

Тогда существует обратный оператор Z^{-1} и справедлива формула

$$Z^{-1} = A\,(A^2 + B^2)^{-1} - \mathrm{I}B\,(A^2 + B^2)^{-1}. \tag{19}$$

Доказательство. В силу условия (17) операторы A и B коммутируют с оператором $H = A^2 + B^2$. Следовательно, в силу замечания 1,

$$(A^2 + B^2)^{-1}A = A\,(A^2 + B^2)^{-1}; \quad (A^2 + B^2)^{-1}B = B\,(A^2 + B^2)^{-1}. \tag{20}$$

Используя операцию умножения (3), условие (17) и соотношения (20), проверим выполнимость равенств (16):

$$Z\,Z^{-1} = A^2\,(A^2 + B^2)^{-1} + B^2\,(A^2 + B^2)^{-1} +$$

$$+\mathrm{I}\,[-AB\,(A^2 + B^2)^{-1} + BA\,(A^2 + B^2)^{-1}] = (A^2 + B^2)\;(A^2 + B^2)^{-1} +$$

$$+\mathrm{I}\,[(-AB + BA)\,(A^2 + B^2)^{-1}] = I + \mathrm{I}O = I;$$

$$Z^{-1}Z = A\,(A^2 + B^2)^{-1}A + B\,(A^2 + B^2)^{-1}B +$$

$$+\mathrm{I}\,[A\,(A^2 + B^2)^{-1}B - B\,(A^2 + B^2)^{-1}A] = A^2\,(A^2 + B^2)^{-1} + B^2\,(A^2 + B^2)^{-1} +$$

$$+\mathrm{I}\,[AB\,(A^2 + B^2)^{-1} - BA\,(A^2 + B^2)^{-1}] = (A^2 + B^2)\,(A^2 + B^2)^{-1} +$$

$$+\mathrm{I}\,[(AB - BA)\,(A^2 + B^2)^{-1}] = I + \mathrm{I}O = I.$$

Равенства (16) выполняются. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *При выполнении условий (17), (18) сопряженный оператор* $\bar{Z} = A - \mathrm{I}B$ *имеет обратный*

$$\bar{Z}^{-1} = A\,(A^2 + B^2)^{-1} + \mathrm{I}B\,(A^2 + B^2)^{-1}. \tag{21}$$

В силу соотношений (19), (21) справедливо равенство $\bar{Z}^{-1} = \overline{Z^{-1}}$.

Изложим некоторые факты из теории нормированных пространств применительно к пространству $C_{L(E)} = [L(E)]^2$, при этом используем тот факт, что сходимость по норме декартова произведения нормированных пространств равносильна покоординатной сходимости.

Рассмотрим последовательность $Z_n = X_n + \mathrm{I}Y_n$, $n \in N$, элементов из пространства $C_{L(E)}$. Пусть $Q = A + \mathrm{I}B \in C_{L(E)}$. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} Z_n = Q \Leftrightarrow (\,\exists \lim_{n\to\infty} X_n = A\,) \wedge (\,\exists \lim_{n\to\infty} Y_n = B\,),$$

то есть вопрос о сходимости последовательности элементов из пространства $C_{L(E)}$ сводится к вопросу о сходимости двух последовательностей элементов из пространства $L(E)$.

Рассмотрим ряд с членами $Z_n = X_n + \mathrm{I}Y_n$, $n \in N$, из пространства $C_{L(E)}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ сходится к $S = S^{(1)} + \mathrm{I}S^{(2)} \Leftrightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ сходится к $S^{(1)}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ сходится к $S^{(2)}$, то есть вопрос о сходимости ряда с членами из пространства $C_{L(E)}$ сводится к вопросу о сходимости двух рядов с членами их пространства $L(E)$.

Рассмотрим функцию $W = f(Z) = U(X,Y) + \mathrm{I}V(X,Y)$, где $f : D(f) \subseteq C_{L(E)} \to C_{L(E)}$. Пусть $Z_0 = X_0 + \mathrm{I}Y_0$ – предельная точка множества $D(f)$, $Q = A + \mathrm{I}B$. Тогда

$$\exists \lim_{Z \to Z_0} f(Z) = Q \Leftrightarrow (\exists \lim_{\substack{X \to X_0 \\ Y \to Y_0}} U(X,Y) = A) \wedge (\lim_{\substack{X \to X_0 \\ Y \to Y_0}} V(X,Y) = B).$$

Непрерывность функции $f(Z)$ в данной точке $Z_0 \in D(f)$ (на данном множестве $M \subseteq D(f)$) равносильна непрерывности ее действительной и мнимой частей в этой точке (на этом множестве).

Пусть Z_0 – внутренняя точка множества $D(f)$. Функция $W = f(Z)$ называется дифференцируемой в точке Z_0, если $\exists\, \Psi \in C_{L(E)}$, $\exists\, O_\delta(Z_0) \mid \forall H \in D(f):\ \ Z_0 + H \in O_\delta(Z_0)$ выполняется: $f(Z_0 + H) - f(Z_0) \ \ = \Psi H + \omega(H)$, где $\|\, \omega(H)\, \| = o\,(\,||H||\,)$ при $H \to O$, при этом Ψ называется производной функции $f(Z)$ в точке Z_0: $f'(Z_0) = \Psi$.

Как и в теории функций комплексного переменного, под аналитичностью функции $f(Z)$ в точке Z_0 понимается ее дифференцируемость в некоторой окрестности этой точки; под аналитичностью на открытом множестве $D \subseteq D(f)$ – ее аналитичность в каждой точке этого множества.

Укажем одно приложение комплексных операторов. Рассмотрим в банаховом пространстве E уравнение

$$u^{(n)} + A_1\, u^{(n-1)} + ... + A_{n-1}\, u' + A_n\, u = f(t), \quad 0 \le t < \infty, \tag{22}$$

где $A_i \in L(E)$, $1 \le i \le n$; $f(t) \in C\ ([0,\infty); E)$.

Известно [6], что общее решение уравнения (22) имеет вид $u = u_{0,0} + u_*$, где $u_{0,0}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$u^{(n)} + A_1\, u^{(n-1)} + ... + A_{n-1}\, u' + A_n\, u = 0, \quad 0 \le t < \infty; \tag{23}$$

u_* – некоторое частное решение неоднородного уравнения (22).

Рассмотрим для (23) характеристическое операторное уравнение

$$P(\Lambda) = O, \tag{24}$$

где

$$P(\Lambda) = \Lambda^n + A_1\, \Lambda^{n-1} + ... + A_{n-1}\, \Lambda + A_n - \tag{25}$$

характеристический операторный многочлен уравнения (23). Задача о нахождении u_* решена: в случае, когда правая часть $f(t)$ уравнения (22) имеет общий вид, u_* найдено методом вариации произвольных постоянных в работе [6]; в случае, когда $f(t)$ имеет специальный вид, u_* получено методом неопределенных коэффициентов в работе [7]. Вид $u_{0,0}$ определяется видом корней уравнения (24). Общее решение $u_{0,0}$ найдено в работе [6] в случае, когда уравнение (24) имеет n различных корней $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n \in L(E)$; в работе [8] в случае, когда уравнение (24) имеет p корней $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_p \in L(E)$ с кратностями соответственно $r_1, r_2, \dots, r_p$ $(r_1 + r_2 + \dots + r_p = n)$, при этом при построении $u_{0,0}$ была использована операторная экспонента

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k\,!}, \quad A \in L(E), \tag{26}$$

для которой, как известно [9, с. 41],

$$(e^{At})' = A\,e^{At}. \tag{27}$$

Пусть среди корней многочлена $P(\Lambda)$ (то есть среди корней уравнения (24)) имеется хотя бы один комплексный оператор. В целях ясности дальнейшего изложения напомним два понятия из работы [8]: формальной производной m-го порядка многочлена $P(\Lambda)$ называется операторное выражение, получаемое из $P(\Lambda)$ путем его формального дифференцирования по Λ по обычным правилам дифференцирования функций вещественной переменной; при $0 \le m \le n$ справедлива формула

$$P^{(m)}(\Lambda) = m!\sum_{k=0}^{n-m} C^m_{n-k}\,A_k\,\Lambda^{n-m-k}, \tag{28}$$

где $A_0 = I$ (в частности, $P^{(0)}(\Lambda) = P(\Lambda)$); оператор $\Lambda_0 \in C_{L(E)}$ (в частности, оператор $\Lambda_0 \in L(E)$) называется корнем кратности r многочлена $P(\Lambda)$, если

$$P^{(m)}(\Lambda_0) = O, \quad 0 \le m \le r-1; \tag{29}$$

$$P^{(r)}(\Lambda_0) \ne O. \tag{30}$$

Лемма 1. *Пусть комплексный оператор $\Lambda_0 = A_0 + \mathrm{I}B_0$ является корнем кратности r многочлена $P(\Lambda)$. Тогда сопряженный ему оператор $\bar\Lambda_0 = A_0 - \mathrm{I}B_0$ также является корнем кратности r многочлена $P(\Lambda)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы 1 выполняются соотношения (29), (30). Следовательно, $\overline{P^{(m)}(\Lambda_0)} = \bar O$, $0 \le m \le r-1$; $\overline{P^{(r)}(\Lambda_0)} \ne \bar O$. Учитывая вид $P(\Lambda_0)$, $P^{(m)}(\Lambda_0)$ (см. формулы (25), (28)) а также соотношения (10), (11), (14), (15), получаем: $P^{(m)}(\bar\Lambda_0) = O$, $0 \le m \le r-1$; $P^{(r)}(\bar\Lambda_0) \ne O$, а это означает, по определению, что $\bar\Lambda_0$ является корнем кратности r многочлена $P(\Lambda)$. Лемма 1 доказана.

Доказанная лемма позволяет лучше представить структуру характеристических операторов уравнения (23).

Пусть уравнение (24) имеет p действительных операторных корней $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_p$ (то есть $\Lambda_i \in L(E)$, $1 \le i \le p$) с кратностями соответственно $r_1, r_2, \dots, r_p$ и q пар комплексно сопряженных операторных корней $Z_1 = F_1 + \mathrm{I}B_1$, $\bar Z_1 = F_1 - \mathrm{I}B_1$, $Z_2 = F_2 + \mathrm{I}B_2$, $\bar Z_2 = F_2 - \mathrm{I}B_2$, ... , $Z_q = F_q + \mathrm{I}B_q$, $\bar Z_q = F_q - \mathrm{I}B_q$ с кратностями соответственно $s_1, s_2, \dots, s_q$, при этом $r_1 + r_2 + \dots + r_p + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_q) = n$. Известно [10], что в этом случае при построении общего решения уравнения (23) приходится наряду с (26) рассматривать операторную экспоненту с комплексным оператором $Z = A + \mathrm{I}B$:

$$e^{Zt} = e^{(A+\mathrm{I}B)t} = e^{At}\left(\cos Bt + \mathrm{I}\sin Bt\right), \tag{31}$$

где e^{At} определяется формулой (26),

$$\cos Bt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k} B^{2k}}{(2k)\,!}; \quad \sin Bt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)\,!}.$$

Заметим, что

$$(\cos Bt)' = -B\sin Bt; \tag{32}$$

$$(\sin Bt)' = B\cos Bt. \tag{33}$$

Покажем, что для производной функции e^{Zt} имеет место аналог формулы (27). Для этого установим вначале одно вспомогательное утверждение. Рассмотрим функцию $F : [0,\infty) \to C_{L(E)}$, $F(t) = \mu(t) + \mathrm{I}\nu(t)$, где $\mu, \nu : [0,\infty) \to L(E)$.

Лемма 2. *Если действительная и мнимая части функции* $F(t)$ *дифференцируемы на полуоси* $[0,\infty)$, *то* $F(t)$ *дифференцируема на* $[0,\infty)$ *и справедлива формула*

$$F'(t) = \mu'(t) + \mathrm{I}\nu'(t). \tag{34}$$

Утверждение леммы 2 справедливо в силу равенства $C_{L(E)} = [L(E)]^2$ и того факта, что производная функции определяется с помощью предельного перехода, а предельный переход в декартовом произведении нормированных пространств равносилен покоординатному предельному переходу.

Действительная и мнимая части операторной экспоненты (31) дифференцируемы на $[0,\infty)$. Следовательно, в силу леммы 2, эта экспонента дифференцируема на $[0,\infty)$.

Теорема 2. *Пусть*

$$AB = BA. \tag{35}$$

Тогда

$$(e^{Zt})' = Z\,e^{Zt}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу (34), получаем равенство

$$(e^{Zt})' = (e^{At}\cos Bt)' + \mathrm{I}\,(e^{At}\sin Bt)'.$$

Применяя правило дифференцирования композиции операторных функций, а также формулы (27), (32), (33), имеем:

$$(e^{At}\cos Bt)' = Ae^{At}\cos Bt - e^{At}B\sin Bt;$$

$$(e^{At}\sin Bt)' = Ae^{At}\sin Bt + e^{At}B\cos Bt.$$

Тогда

$$(e^{Zt})' = e^{At}[A\cos Bt - B\sin Bt + \mathrm{I}\,(A\sin Bt + B\cos Bt)].$$

Заметим, что

$$A\cos Bt - B\sin Bt + \mathrm{I}\,(A\sin Bt + B\cos Bt) = (A + \mathrm{I}B)\,(\cos Bt + \mathrm{I}\sin Bt).$$

Следовательно,

$$(e^{Zt})' = e^{At}(A + \mathrm{I}B)\,(\cos Bt + \mathrm{I}\sin Bt).$$

В силу условия (35)

$$e^{At}(A + \mathrm{I}B) = (A + \mathrm{I}B)\,e^{At}.$$

Тогда

$$(e^{Zt})' = (A + \mathrm{I}B)\,e^{At}\,(\cos Bt + \mathrm{I}\sin Bt) = Z\,e^{Zt}.$$

Теорема 2 доказана.

2. Основные результаты

При изучении линейных дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве E возникает задача изучения множества комплексных операторов вида $C_{N(E)} = \{Z = A + \mathrm{I}B | A, B \in N(E)\}$, где $N(E)$ – множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих из E в E, с плотными в E областями определения. В этом случае $C_{N(E)} = [N(E)]^2$, где $[N(E)]^2 = N(E) \times N(E)$ – декартов квадрат множества $N(E)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фомин В.И.* О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1140-1141.

2. *Фомин В.И.* О линейном дифференциальном уравнении второго порядка в банаховом пространстве в случае негативного операторного дискриминанта // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2008. Т. 13. Вып. 1. С. 38-42.

3. Функциональный анализ / под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.

4. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.

5. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. 896 с.

6. *Фомин В.И.* Об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 656-660.

7. *Фомин В.И.* О линейном дифференциальном уравнении n-го порядка в банаховом пространстве со специальной правой частью // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1518-1520.

8. *Фомин В.И.* О случае кратных корней характеристического операторного многочлена линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 5. С. 710-713.

9. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.

10. *Фомин В.И.* О случае комплексных характеристических операторов линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции. Воронеж: ВГУ, 2007. С. 231-232.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Фомин Василий Ильич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической механики и деталей машин, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

Для цитирования: *Фомин В.И.* О банаховой алгебре комплексных операторов // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 813–823. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823

ABOUT THE BANACH ALGEBRA OF COMPLEX OPERATORS

V. I. Fomin

Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: vasiliyfomin@bk.ru

Abstract. The Banach algebra of complex operators that are used in the study of linear differential equations with constant bounded operator coefficients in a Banach space is consiuder.
Keywords: complex operator; linear operations; operation of multiplication; norm; Banach algebra; algebraic form of a complex operator; operator exponent

REFERENCES

1. Fomin V.I. O reshenii zadachi Koshi dlya lineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka v banakhovom prostranstve [On the solution of the Cauchy problem for a second-order linear differential equation in a banach space]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 8, pp. 1140-1141. (In Russian).

2. Fomin V.I. O lineynom differentsial'nom uravnenii vtorogo poryadka v banakhovom prostranstve v sluchaye negativnogo operatornogo diskriminanta [On the second-order linear differential equation in Banach space in the case of negative operator discriminant]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2008, vol. 13, no. 1, pp. 38-42. (In Russian).

3. Krein S.G. (ed.). *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 544 p. (In Russian).

4. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 496 p. (In Russian).

5. Danford N., Shvarts D. *Lineynyye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators. General Theory]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1962, 896 p. (In Russian).

6. Fomin V.I. Ob obshchem reshenii lineynogo differentsial'nogo uravneniya n-go poryadka s postoyannymi ogranichennymi operatornymi koeffitsiyentami v banakhovom prostranstve [On the general solution of a linear nth-order differential equation with constant bounded operator coefficients in a banach space]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 5, pp. 656-660. (In Russian).

7. Fomin V.I. O lineynom differentsial'nom uravnenii n-go poryadka v banakhovom prostranstve so spetsial'noy pravoy chast'yu [On a linear nth-order differential equation with special right-hand side in a Banach space]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 1518-1520. (In Russian).

8. Fomin V.I. O sluchaye kratnykh korney kharakteristicheskogo operatornogo mnogochlena lineynogo odnorodnogo differentsial'nogo uravneniya n-go poryadka v banakhovom prostranstve [On the case of multiple roots of the characteristic operator polynomial of an nth-order linear

homogeneous differential equation in a banach space]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 5, pp. 710-713. (In Russian).

9. Daletskiy Yu.L., Kreyn M.G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 536 p. (In Russian).

10. Fomin V.I. O sluchaye kompleksnykh kharakteristicheskikh operatorov lineynogo odnorodnogo differentsial'nogo uravneniya n-go poryadka v banakhovom prostranstve [On the case of complex characteristic operators of a n-th order linear homogeneous differential equation in a Banach space]. *Materialy konferentsii «Sovremennyye metody teorii funktsiy i smezhnyye problemy»* [Conference Materials "Modern Methods of Function Theory and Related Problems"]. Voronezh, Voronezh State University Publ., 2007, pp. 231-232. (In Russian).

Received 18 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Fomin Vasiliy Ilyich, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Technical Mechanics and Machine Parts Department, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

For citation: Fomin V.I. O banahovoj algebre kompleksnyh operatorov [About the Banach Algebra of Complex Operators]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 813–823. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823 (In Russian, Abstr. in Engl.).